

Semaine 2:
Dynamique des fluides parfaits

Quantités du modèle fluide

Champs vectoriels:

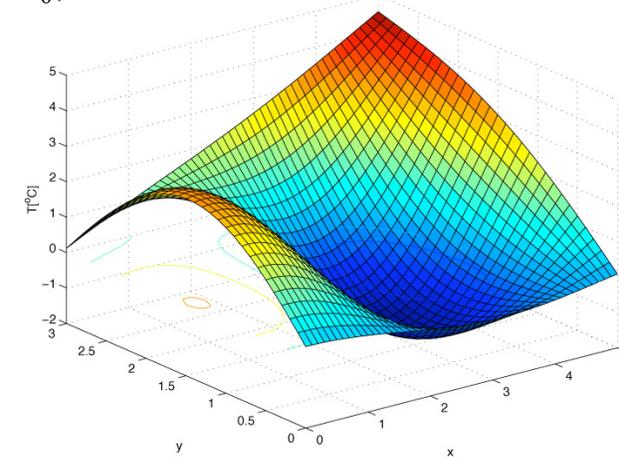
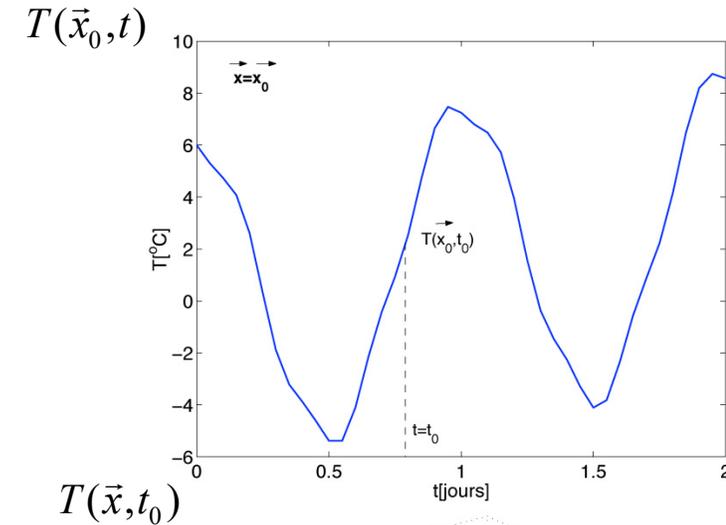
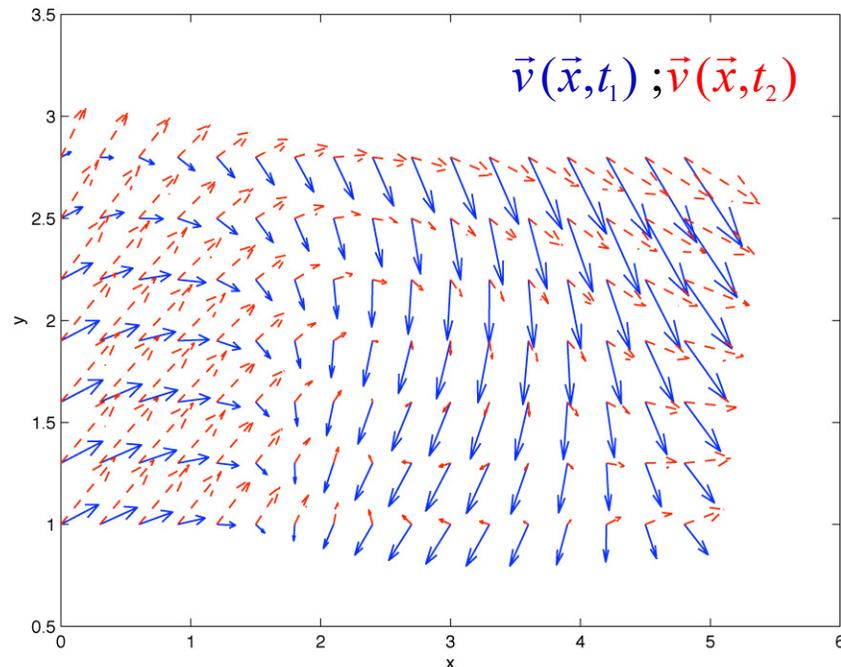
Vitesse: $\vec{v}(\vec{x}, t) = v_x(x, y, z, t)\vec{e}_x + v_y(x, y, z, t)\vec{e}_y + v_z(x, y, z, t)\vec{e}_z$

Champs scalaires:

Densité: $\rho(\vec{x}, t) = \rho(x, y, z, t)$

Pression: $P(\vec{x}, t) = P(x, y, z, t)$

Temperature: $T(\vec{x}, t) = T(x, y, z, t)$



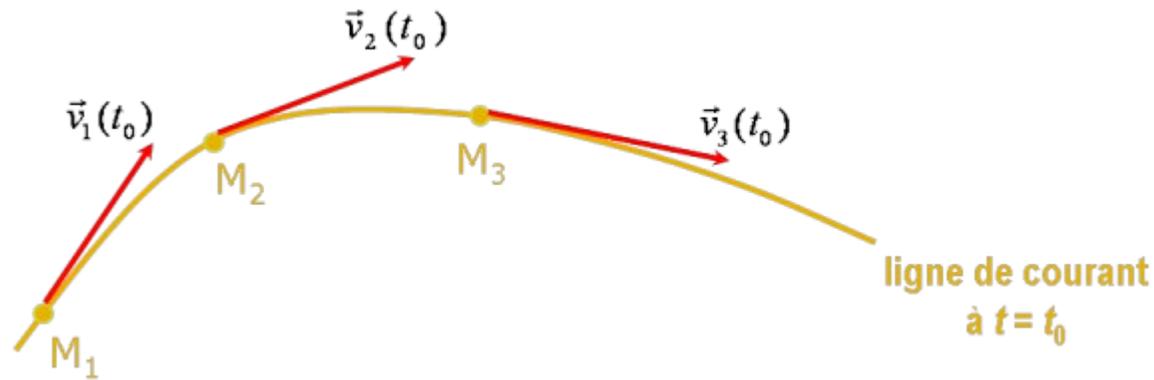
La dynamique des particules fluides est décrit par des équations différentielle (voir suite)
reliant entre eux les champs scalaires et vectorielles associés aux particules fluides

Descriptions Eulérienne et Lagrangienne: Ligne de courant et trajectoire

Description d'Euler

Nous considérons au cours du temps les quantités pression, densité, vitesse, etc. en des endroits fixes de l'espace. C'est donc une image instantanée de l'écoulement qui est utilisée.

Définition de **ligne de courant (streamline)** pour l'instant t : courbe qui en chacun des points est tangente au vecteur vitesse à l'instant t . Donc on prendra soin de dater les lignes de courant (ligne de courant à l'instant t_0, t_1, \dots).



Ligne de courant a partir du champ de vitesse $\vec{v}(\vec{x}, t)$:

$$d\vec{x}(\vec{x}, t) \times \vec{v}(\vec{x}, t) = 0$$

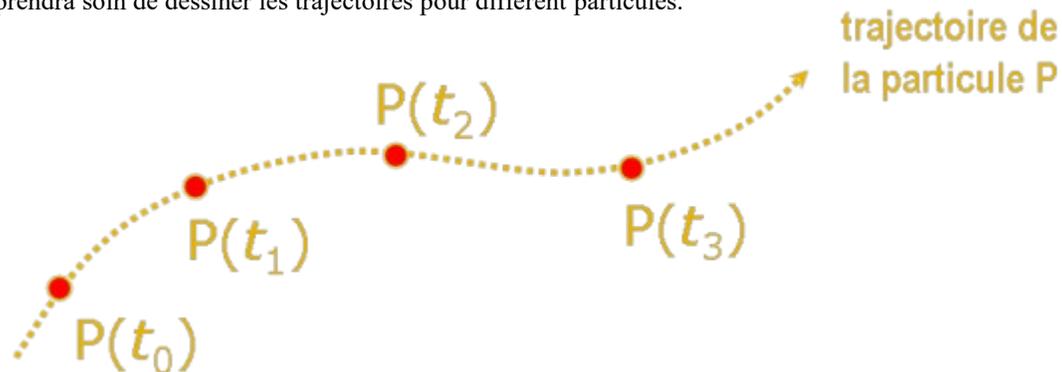
$$\text{ou } d\vec{x}(\vec{x}, t) = \frac{\vec{v}(\vec{x}, t)}{|\vec{v}(\vec{x}, t)|}$$

$d\vec{x}(\vec{x}, t)$: vecteur unitaire parallèle au vecteur vitesse

Description de Lagrange

Nous considérons au cours du temps les quantités pression, densité, vitesse, etc. dans des particules fluide qui se déplacent. Il s'agit d'une description de l'écoulement qui consiste à suivre dans l'espace fluide une particule fluide choisie en fonction du temps.

Définition de la **trajectoire (path)** d'une particule fluide: ensemble des positions occupées successivement par une même particule fluide. Donc on prendra soin de dessiner les trajectoires pour différentes particules.



Rappel: La **particule fluide** est un «paquet de molécules» entourant un point donné de l'espace fluide. La vitesse de la particule fluide est la vitesse moyenne (vectorielle) des molécules dans le «paquet de molécules».

Ligne de courants = Trajectoires

\Leftrightarrow

Écoulement stationnaire

$$\text{(i.e., } \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall \vec{x}, \forall t)$$

Dérivée «totale»

Soit:

$\vec{v}(\vec{x}, t)$ le champ de vitesse du fluide

$f = f(x, y, z, t) = f(\vec{x}, t)$ un champ scalaire

$\vec{A} = \vec{A}(x, y, z, t) = \vec{A}(\vec{x}, t)$ un champ vectoriel

⇒ (sans démonstration)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) f$$

Dérivée le long de la trajectoire,
dérivée lagrangienne,
material derivative,
dérivée particulière

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A}$$

La représentation d'Euler définit à tout instant la valeur d'une grandeur associée à un point fixe de l'écoulement.

La variation de cette grandeur au cours du temps est alors décrite par une dérivée partielle parfois appelée *dérivée eulérienne*.

La représentation de Lagrange suit une particule fluide dans son mouvement.

La variation au cours du temps d'une grandeur physique dans la particule fluide en mouvement est représentée par la *dérivée particulière* ou *dérivée totale* ou *dérivée lagrangienne* ou *dérivée le long de la trajectoire*.

Exemple: vitesse du vent

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$: «taux de changement» dans le temps de *la vitesse du fluide* au point fixe (x,y,z)

$\frac{d\vec{v}}{dt}$: «taux de changement» dans le temps de *la vitesse de la particule fluide*
(= accélération de la particule fluide).

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$$

Donc, en générale: $\frac{d}{dt} \neq \frac{\partial}{\partial t}$

Exemple: pression atmosphérique

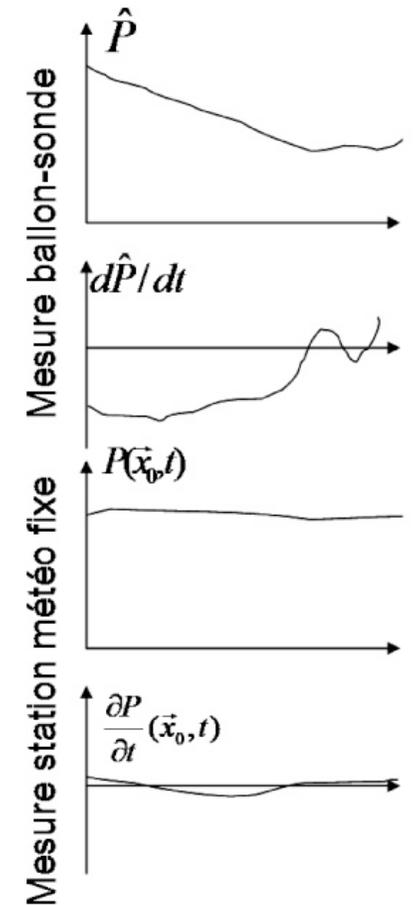
$\frac{\partial P}{\partial t}$: «taux de changement» dans le temps de la pression au point fixe (x,y,z)

«taux de changement» dans le temps de la pression atmosphérique mesurée par un baromètre placée dans une station météo fixe.

$\frac{dP}{dt}$: «taux de changement» dans le temps de la pression dans la particule fluide.

«taux de changement» dans le temps de la pression atmosphérique mesurée par un baromètre emporté par un ballon sonde qui suivrait le mouvement des masses d'air.

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) P$$



Note 1:

$$(\vec{v} \cdot \nabla)P = \left((v_x, v_y, v_z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) P = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) P = v_x \frac{\partial}{\partial x} P + v_y \frac{\partial}{\partial y} P + v_z \frac{\partial}{\partial z} P$$

$$\vec{v} \cdot (\nabla P) = (v_x, v_y, v_z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} P, \frac{\partial}{\partial y} P, \frac{\partial}{\partial z} P \right) = v_x \frac{\partial}{\partial x} P + v_y \frac{\partial}{\partial y} P + v_z \frac{\partial}{\partial z} P$$

$$\Rightarrow (\vec{v} \cdot \nabla)P = \vec{v} \cdot (\nabla P)$$

Note 2:

$$(\nabla \cdot \vec{v})P = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) P = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} P + \frac{\partial v_y}{\partial y} P + \frac{\partial v_z}{\partial z} P \right)$$

$$\Rightarrow (\vec{v} \cdot \nabla)P \neq (\nabla \cdot \vec{v})P$$

Note 3:

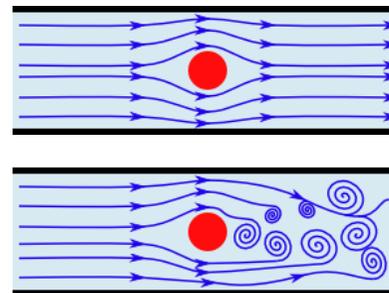
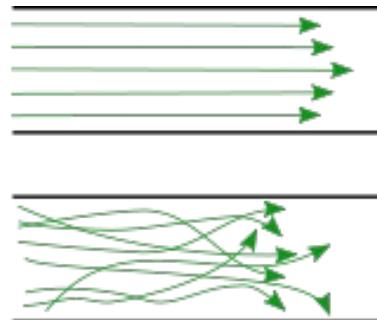
$$\begin{aligned} (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} &= \left((v_x, v_y, v_z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) (v_x, v_y, v_z) = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (v_x, v_y, v_z) = \\ &= \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}, v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} &= \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}, v_x \frac{\partial v_y}{\partial x}, v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \left(v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}, v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}, v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) + \left(v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}, v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \\ &= \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}, v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ \Rightarrow (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} &= v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \end{aligned}$$

Types d'écoulements

Définition

- **Statique:** $\vec{v}(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall \vec{x}, \forall t$ La vitesse est nul partout dans le fluide et reste zéro au fil du temps.
- **Stationnaire:** $\frac{\partial}{\partial t} \vec{v}(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall \vec{x}, \forall t$ La vitesse peut différer d'un point à l'autre du fluide mais ne change pas avec le temps. Les trajectoires sont identiques à les lignes de courant
- **Laminaire:** trajectoires = lignes de courant Un écoulement stationnaire est toujours laminaire
- **Turbulent:** trajectoires \neq lignes de courant Un écoulement turbulent est toujours non-stationnaire
- **Irrotationnel:** $\nabla \times \vec{v} = 0 \quad \forall \vec{x}, \forall t$

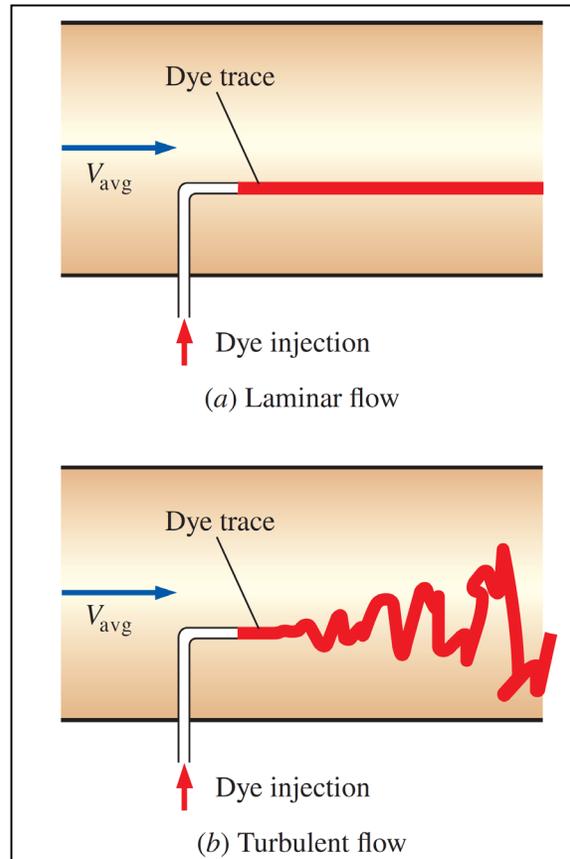
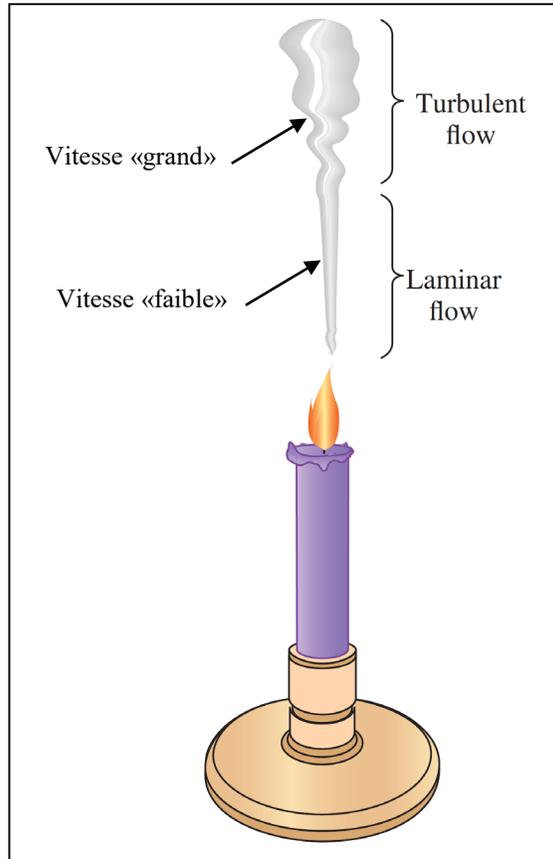
Trajectoires



Laminaire

Turbulent

Laminaire ou Turbulent ?



Exemple: Tuyau circulaire

$$\mathfrak{R} \leq 2300$$

Laminaire

$$2300 \leq \mathfrak{R} \leq 4000$$

Transition Laminaire-Turbulent

$$\mathfrak{R} \geq 4000$$

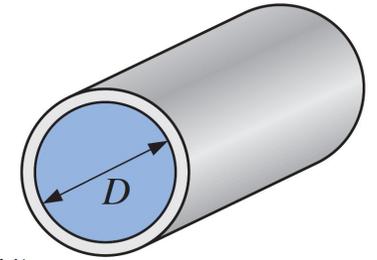
Turbulent

avec:

$$\mathfrak{R} = \frac{\rho D v}{\eta} \quad (\text{nombre de Reynolds})$$

η : viscosité du fluide ρ : densité du fluide

D : diamètre du tuyau v : vitesse moyenne du fluide



Plus en général (voir plus tard dans le cours):

Le nombre de Reynolds est une valeur sans dimension qui mesure le rapport des **forces d'inertie** aux **forces visqueuses** et décrit le degré d'écoulement **laminaire** ou **turbulent**.

Les systèmes qui fonctionnent dans le même nombre de Reynolds auront les mêmes caractéristiques d'écoulement, même si le fluide, la vitesse, et longueurs caractéristiques varient.

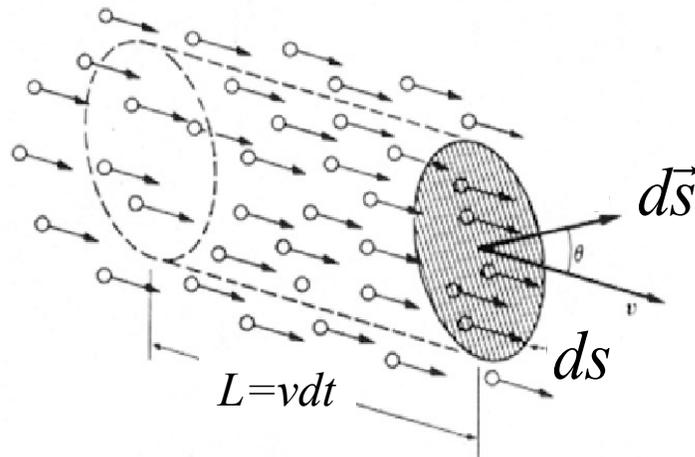
Le flux de masse

Flux de masse:

Masse qui traverse la surface ds dans le temps dt

=

masse de fluide qui se trouve dans le “cylindre” de volume $dV = v dt ds \cos \theta$.



$$d\Phi = \rho v \cos \theta ds = \rho \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

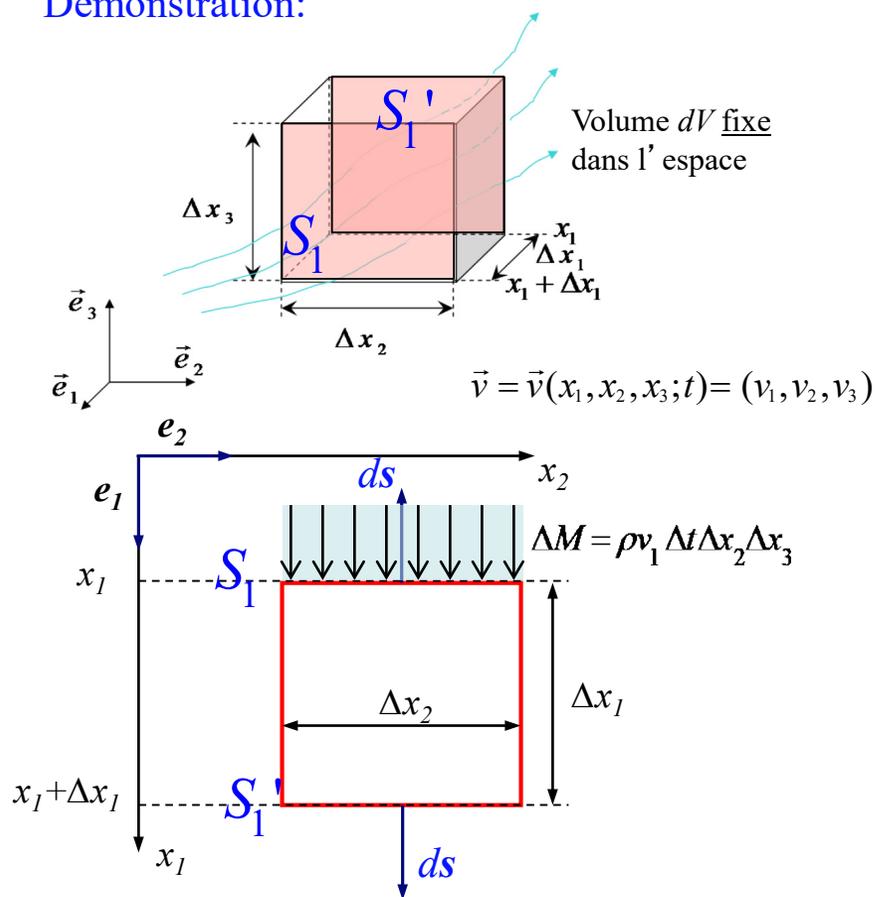
$$\Phi = \int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad \text{Flux de masse [kg/s]}$$

Conservation de la masse (éq. de continuité): forme locale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

forme *locale* de l'équation de continuité
(conservation de la masse)

Démonstration:



Flux de masse à travers les surfaces de dV :

$$S : d\vec{s} = -\vec{e}_1 ; \Phi_S = \int_{S_1} \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} = -\rho(x_1, x_2, x_3; t) v_1(x_1, x_2, x_3; t) \Delta x_2 \Delta x_3$$

$$S' : d\vec{s} = \vec{e}_1 ; \Phi_{S'} = \rho(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3; t) v_1(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3; t) \Delta x_2 \Delta x_3$$

\Rightarrow

$$\Phi_S + \Phi_{S'} = \frac{\Delta(\rho v_1)}{\Delta x_1} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$$

$$\Delta x_1 \rightarrow 0 \quad \Phi_S + \Phi_{S'} \rightarrow \frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x_1} dV$$

$$\sum_i \Phi_i = \left(\frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho v_3)}{\partial x_3} \right) dV = \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV$$

$$\text{variation de la masse en } dV: \quad \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho dV) = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

variation de la masse en $dV = -$ (flux totale de masse travers les surfaces de dV)

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Conservation de la masse (éq. de continuité): forme globale

Explication intuitive: la variation de masse contenue dans le volume V doit être égale à la masse traversant la surface S délimitant le volume V .

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

forme *globale* de l'équation de continuité (conservation de la masse)

Démonstration:

Théorème de la divergence

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

\Rightarrow

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$$

\Rightarrow

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

Exemple d'application de l'équation de continuité globale

(pour un fluide incompressible)

Forme *globale* de
l'équation de continuité:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

Fluide incompressible:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{S_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{S_L} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

Sur la surface laterale L : $\vec{v} \perp d\vec{s} \Rightarrow \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \int_{S_L} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$

$$\Rightarrow \int_{S_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$$

Si: $\vec{v} // d\vec{s}$ sur la surface $S_i \Rightarrow \vec{v} \cdot d\vec{s} = v ds$

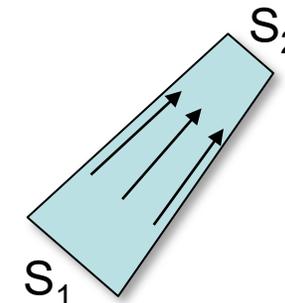
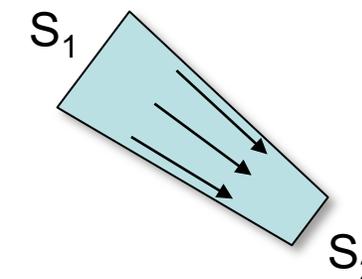
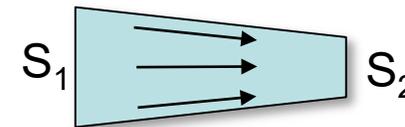
\vec{v} est la meme partout sur la surface S_i (viscosité negligeeable)

$$\Rightarrow v_1 S_1 = v_2 S_2$$

Note :

Si la viscosité est non negligeeable \Rightarrow

$\langle v_1 \rangle S_1 \cong \langle v_2 \rangle S_2$ (voir plus loin dans le cours)



Fluides et écoulements incompressible

Fluide incompressible:

Un fluide est dit incompressible si sa densité demeure constant sous l'action d'une pression externe:

$$\rho = \text{const} \quad \forall \vec{x}, \forall t \quad (\text{i.e., } \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad \forall \vec{x}, \forall t)$$

Écoulement incompressible:

Un fluide est dit en écoulement incompressible si la densité de chaque particule fluide est constante au cours de son mouvement, ce qui se traduit par une dérivée totale du champ scalaire de densité nulle:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

Notes:

1. Fluide incompressible $\Rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = 0$

Dem.:

$$\text{Fluide incompressible} \Rightarrow \rho = \text{const} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \Rightarrow \nabla \rho = 0$$

$$\text{Conservation de la masse: } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \rho) \cdot \vec{v} + \rho (\nabla \cdot \vec{v}) = 0 \Rightarrow \rho (\nabla \cdot \vec{v}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

2. Fluide incompressible \Rightarrow Ecoulement incompressible

$$\text{Dem.: Cons. de la masse} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \text{si } \rho = \text{const } \forall \vec{x}, \forall t \Rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = 0;$$

$$\text{Fluide incompressible} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \text{ et } \nabla \rho = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \vec{v} + \rho (\nabla \cdot \vec{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \vec{v} = 0$$

3. Ecoulement incompressible $\not\Rightarrow$ Fluide incompressible

$$\text{Dem.: } \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \vec{v} = 0 \not\Rightarrow \rho = \text{const } \forall \vec{x}, \forall t$$

Fluides parfaits

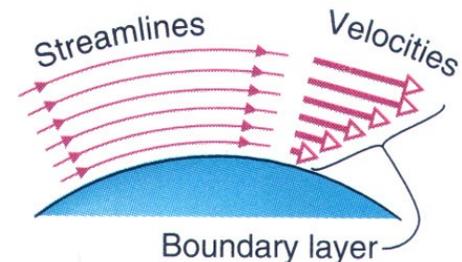
Fluide parfait: viscosité négligeable
 conduction thermique négligeable
 forces dissipative négligeables

«Un **fluide** est dit **parfait** s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de viscosité et de conduction thermique»

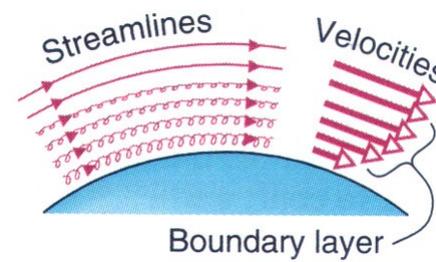
«Dans un **fluide parfait** il n'y a pas des forces dissipative de l'énergie mécanique. Les particules fluides subissent des transformations réversible et adiabatiques»

«Un **fluide parfait** est un fluide qui peut être complètement caractérisé par sa densité ρ et sa pression isotrope P . Les vrais fluides sont collants et contiennent (et conduisent) de la chaleur. Les fluides parfaits sont des modèles idéalisés. Spécifiquement, les fluides parfaits n'ont aucune contrainte de cisaillement, viscosité ou conduction thermique»

«Tous les fluides ayant une viscosité (sauf l'hélium à très basse température et l'intérieur d'une étoile à neutrons). Le fluide parfait ne peut donc être qu'une approximation pour une viscosité tendant vers zéro. Cela revient à faire tendre le nombre de Reynolds vers l'infini. Ce type de situation est cependant très courant, par exemple en aérodynamique (où des nombres de Reynolds très grands sont en jeu). Dans ces conditions, les zones de cisaillement important (où la viscosité et la turbulence sont influentes) sont concentrées dans des espaces restreints, appelés couches limites»



Couche limite laminaire



Couche limite turbulente

Dynamique des fluides parfaits

- À déterminer: $\vec{v}(\vec{x}, t)$, $\rho(\vec{x}, t)$, $P(\vec{x}, t)$, $(T(\vec{x}, t))$
- 5 (6) fonctions en 4 variables \rightarrow 5 (6) équations nécessaire

(x, y, z, t)

Note: Dans ce cours, nous n'aborderons pas des problèmes où le calcul de la température du fluide en fonction de la position et du temps est nécessaire.

Equations 1,2,3: $\vec{F} = m\vec{a}$

$$m = \rho dV$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$$

$$\vec{F} = -\nabla P dV + \rho \vec{g} dV$$

\Rightarrow

$$-\nabla P dV + \rho \vec{g} dV = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) dV$$

\Rightarrow

$$-\nabla P + \rho \vec{g} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right)$$

Equation d'Euler

Seules la force de pression et la force de gravité sont considérées
(aucune force dissipative n'est incluse)

Equation 4: Equation de continuité (conservation de la masse)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Equation 5 (et 6): Equations d'état

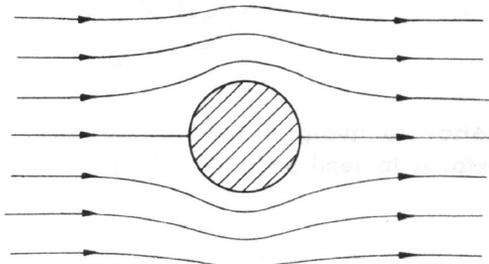
Relation entre pression, densité (et température)

Ex.: gaz parfait avec hypothèse d'adiabaticité

$$P \rho^{-\gamma} = \text{const (le long de la trajectoire)} \quad \gamma = 5/3 \text{ (gaz monatomique)}$$

$$P = \rho \frac{R}{M} T \quad R \cong 8.3 \text{ J/(K mol)}, M : \text{molar mass [kg/mol]}$$

Conditions au limites



Afin de résoudre le système d'équations différentielles, nous devons spécifier les conditions aux limites.

Un choix typique pour un fluide en contact avec un corps solide immobile ayant une surface S est:

$$\vec{v} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\perp} = 0$$

i.e., sur les parois et autour des obstacles la vitesse perpendiculaire la surface est zéro.

Dynamique des gaz parfaits

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla P + \rho \vec{g} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \\ \frac{d}{dt} (P \rho^{-\gamma}) = 0 \\ (P = \rho \frac{R}{M} T) \end{array} \right.$$

- 5 (6) fonctions en 4 variables
- 5 (6) équations

Dynamique des fluides parfait incompressibles

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla P + \rho \vec{g} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} - 4 \text{ fonctions en 4 variables} \\ - 4 \text{ équations} \end{array}$$

Rappel: fluide incompressible: $\rho = \text{const}$

$$\text{conservation de la masse: } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \text{ et } \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \rho \nabla \cdot \vec{v} \Rightarrow \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Dynamique des fluides parfaits incompressibles avec écoulement irrotationnel (ou *potentiel*)

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla P + \rho \vec{g} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \nabla \times \vec{v} = 0 \end{array} \right.$$

Note:

$\vec{v} \equiv$ champ des vitesses

Écoulement irrotationnel: $\nabla \times \vec{v} = 0$

$\nabla \times \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \nabla \phi \quad \phi \equiv$ potentiel des vitesses

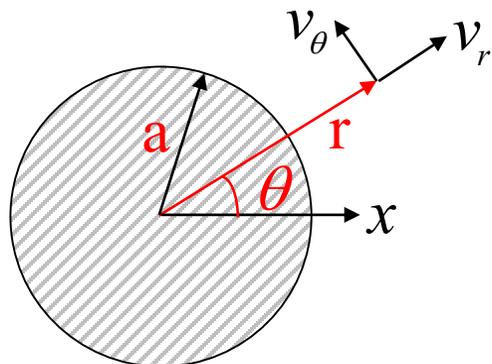
\Rightarrow

$\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = 0$

\Rightarrow

$\nabla^2 \phi = 0$ Equation de Laplace pour le potentiel des vitesses

Exemple: écoulement irrot. autour d'un cylindre infini



Equation de Laplace pour le potentiel des vitesses: $\nabla^2 \phi(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta = \nabla \phi(r, \theta, z); \quad \vec{v}(r = \infty, \theta) = v_\infty \vec{e}_x;$$

Une solution possible de l'équation de Laplace: $\phi(r, \theta) = v_\infty r \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta$

$$\vec{v} = \nabla \phi(r, \theta, z)$$

\Rightarrow

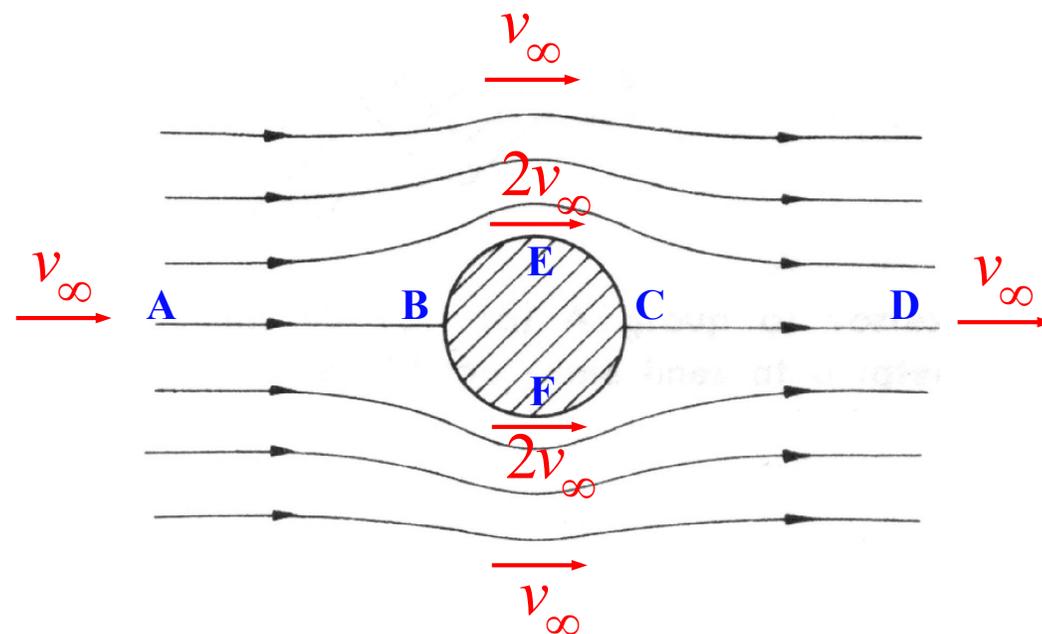
$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = v_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -v_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta$$

\Rightarrow

$$v_r(a, \theta) = 0;$$

$$v_\theta(a, \theta) = -2v_\infty \sin \theta;$$



La vitesse est nulle en B et C: points de stagnation
La vitesse en E et F est **double** de la vitesse en A e D
(et indépendant du diamètre du cylindre)

L'équation de Bernoulli

Pour un fluide parfait et incompressible en écoulement stationnaire soumis à la pesanteur $\mathbf{g} = g\hat{\mathbf{z}}$

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + P = \text{const}$$

Equation de Bernoulli

Energie **cinétique**
(par unité de volume)

Energie **potentielle** de
la force extérieure
(par unité de volume)

Energie de **pression**
(par unité de volume)

$\nabla \times \vec{v} = 0$

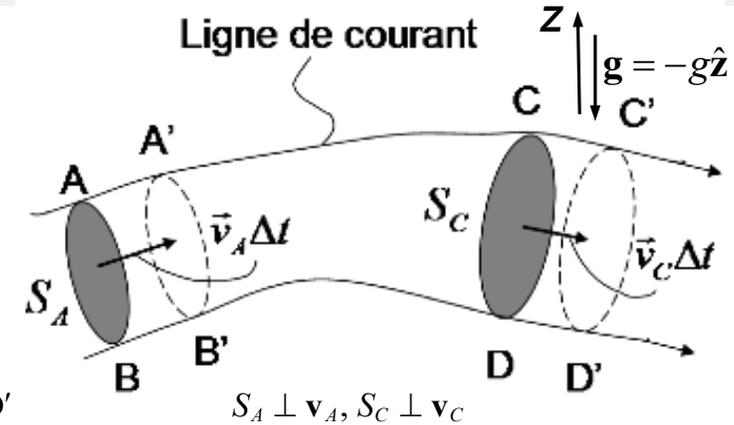
Si l'écoulement est **irrotationnel** la constante est la même pour toutes les lignes de courant.
Si l'écoulement est **rotationnel** la constante est différente pour chaque ligne de courant.

$\nabla \times \vec{v} \neq 0$

Note 1: démonstration de l'équation de Bernoulli:

- Hp:
- fluide parfait et incompressible,
 - écoulement stationnaire,
 - dans champ de pesanteur \mathbf{g} constant dans le temps et uniforme dans l'espace.

morceau du fluide à l'instant t : ABCD
 morceau du fluide à l'instant $t' = t + \Delta t$: A'B'C'D'



écoulement stationnaire →
 → laminaire →
 → ligne de courant=trajectoire

Fluide incompressible: $\rho = \text{const} \Rightarrow \rho_{ABA'B'} = \rho_{CDC'D'} = \rho$

Conservation de la masse: $m_{ABA'B'} = m_{CDC'D'} \Rightarrow \rho S_A v_A \Delta t = \rho S_C v_C \Delta t \Rightarrow S_A v_A \Delta t = S_C v_C \Delta t$
 $\Rightarrow \Delta V_A = \Delta V_C = \Delta V = S_A v_A \Delta t = S_C v_C \Delta t$

Energie cinétique: $\Delta E_{cin} = -E_{cin,ABA'B'} + E_{cin,CDC'D'} = -\frac{1}{2} \rho \Delta V v_A^2 + \frac{1}{2} \rho \Delta V v_C^2$

Energie pot. grav.: $\Delta E_{pot} = -E_{pot,ABA'B'} + E_{pot,CDC'D'} = -\rho \Delta V g z_A + \rho \Delta V g z_C$

Travail des forces de pression: $\Delta W = +P_A S_A v_A \Delta t - P_C S_C v_C \Delta t = (P_A - P_C) \Delta V$

Fluide parfait (pas de dissipation) $\Rightarrow \Delta E = \Delta E_{cin} + \Delta E_{pot} - \Delta W = 0 \Rightarrow \Delta E_{cin} + \Delta E_{pot} = \Delta W$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} \rho \Delta V v_A^2 + \frac{1}{2} \rho \Delta V v_C^2 - \rho \Delta V g z_A + \rho \Delta V g z_C + (P_A - P_C) \Delta V \Rightarrow -\frac{1}{2} \rho v_A^2 + \frac{1}{2} \rho v_C^2 - \rho g z_A + \rho g z_C + (P_A - P_C) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A + P_A = \frac{1}{2} \rho v_C^2 + \rho g z_C + P_C \Rightarrow \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + P = \text{const}$

Note 2. Démonstration de l'équation de Bernoulli à partir de l'équation d'Euler.

Hypothèses :

1. Fluide parfait;

2. $\vec{g} = \text{const.}$; (i.e., $\partial\vec{g} / \partial t = 0$; $\partial\vec{g} / \partial x = \partial\vec{g} / \partial y = \partial\vec{g} / \partial z = 0, \forall \vec{x}, \forall t$)

3. Fluide incompressible: $\rho = \text{const.}$ (i.e., $\partial\rho / \partial t = 0$; $\partial\rho / \partial x = \partial\rho / \partial y = \partial\rho / \partial z = 0, \forall \vec{x}, \forall t$)

5. Ecoulement stationnaire: $(\partial\vec{v} / \partial t) = 0 \quad \forall \vec{x}, \forall t$;

\Rightarrow

$\rho(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \rho \vec{g} + \nabla P = 0$ (équation de Euler) \Rightarrow multipliant scalairement par \vec{v}

$\vec{v} \cdot [\rho(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}] - \rho \vec{g} \cdot \vec{v} + \nabla P \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow$ on utilise l'identité $\nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$

et $\vec{v} \cdot [\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})] = 0 \Rightarrow \rho \vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \rho \vec{g} \cdot \vec{v} + \nabla P \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + P \right) = 0 \Rightarrow$

$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + P = \text{const}$

Note 3. «Démonstration Lagrangienne rapide» de l'équation de Bernoulli.

Conservation de l'énergie dans le volume ΔV :

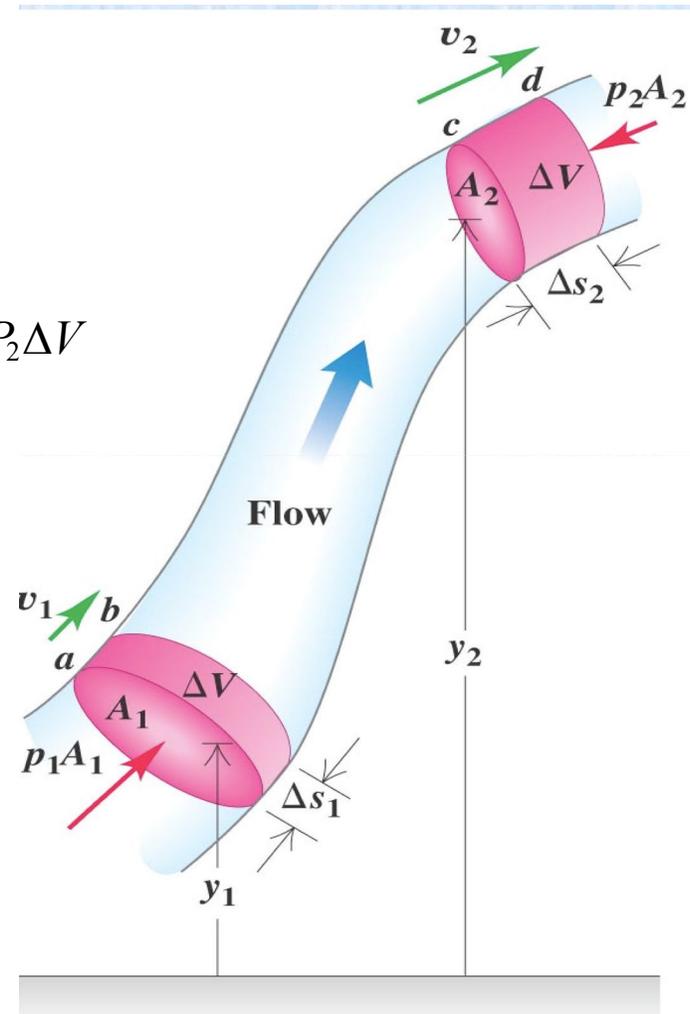
$$\frac{1}{2} \rho \Delta V v_1^2 + \rho \Delta V g y_1 + P_1 \Delta V = \frac{1}{2} \rho \Delta V v_2^2 + \rho \Delta V g y_2 + P_2 \Delta V$$

\Rightarrow

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 + P_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2 + P_2$$

\Rightarrow

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y + P = \text{const}$$



Note 3.

L'équation de la statique n'est plus vraie dès lors que le fluide est en mouvement.
«La pression dans un tuyau n'est pas la même si le robinet est ouvert ou fermé»

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + P = \text{const}$$

Equation de Bernoulli

Pour $v = 0 \Rightarrow \rho g z + P = \text{const}$

Equation de l'équilibre statique

Note 4:

Une hypothèse nécessaire pour l'équation de Bernoulli est l'incompressibilité du fluide.

Les gaz sont compressibles, donc Bernoulli n'est pas forcément valable.

Lorsque les effets de compressibilité dans un fluide ne sont plus négligeables (typiquement pour des vitesses supérieures à 0.3 Mach) il devient nécessaire d'apporter une correction au terme caractérisant l'énergie potentielle élastique du fluide. Pour un gaz parfait et d'un processus adiabatique, on a:

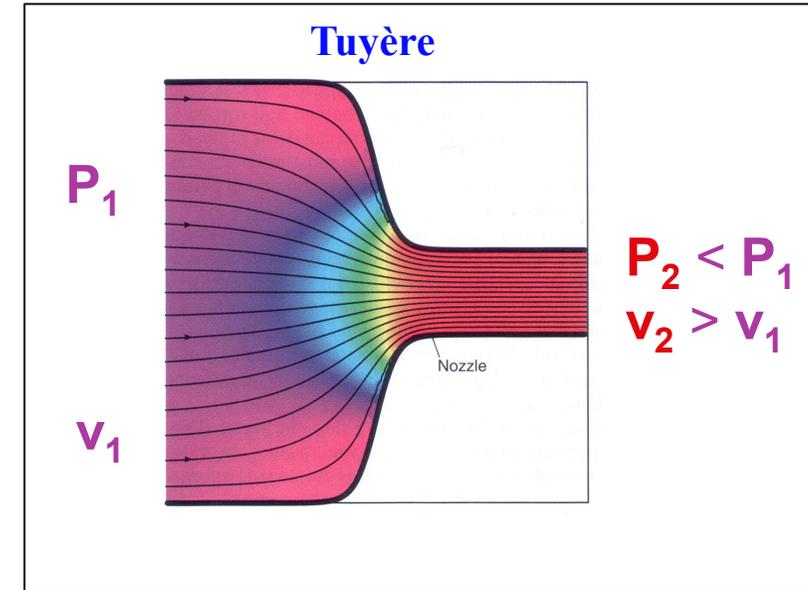
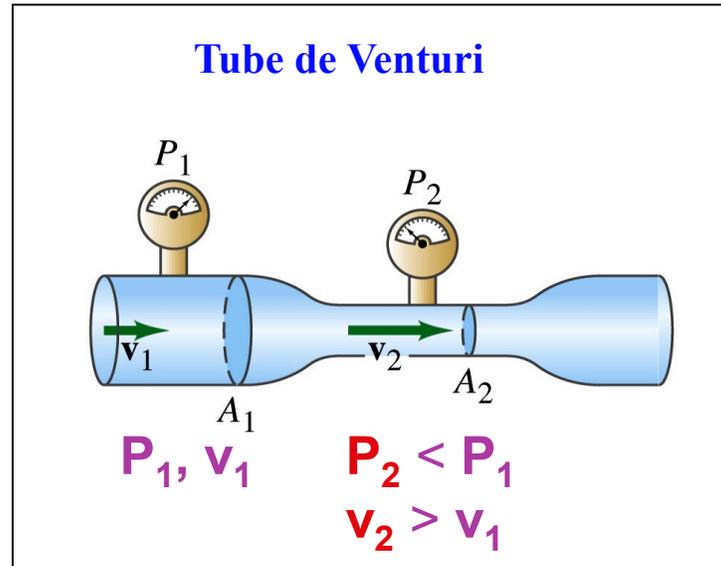
$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + \frac{\gamma}{\gamma - 1} P = \text{const} \quad \gamma = C_P / C_V$$

Pour l'air: $\gamma \cong 1.4 \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + 3.5 P = \text{const}$$

Exemples d'application de l'équation de Bernoulli:

Le tube de Venturi et la Tuyère



Bernoulli: $\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + P = \text{const}$

Conservation de la masse pour fluides incompressibles: $v_1 S_1 = v_2 S_2$

Geometrie: $z_1 = z_2$

\Rightarrow

$v_2 > v_1$

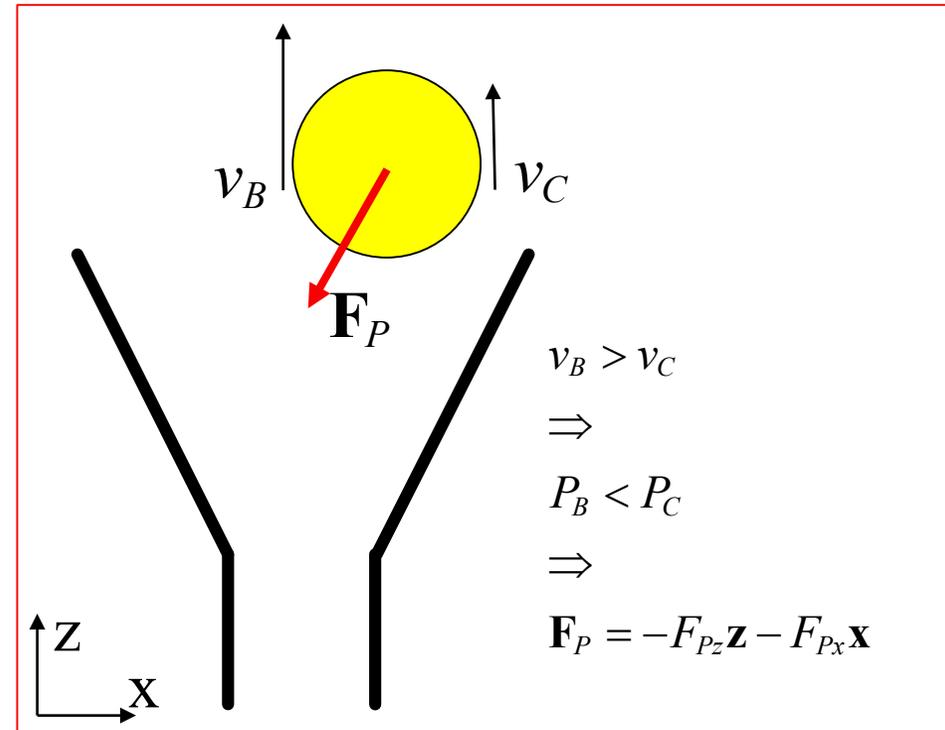
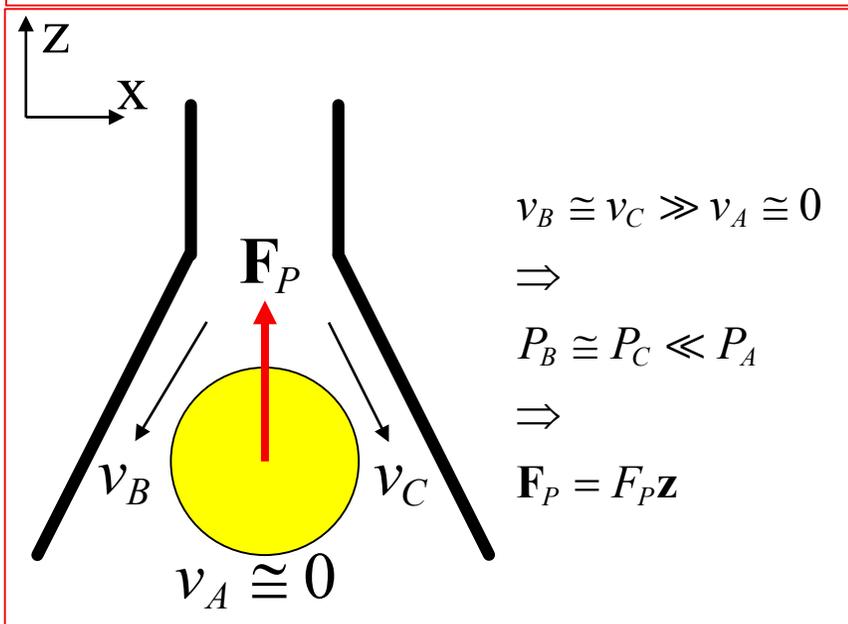
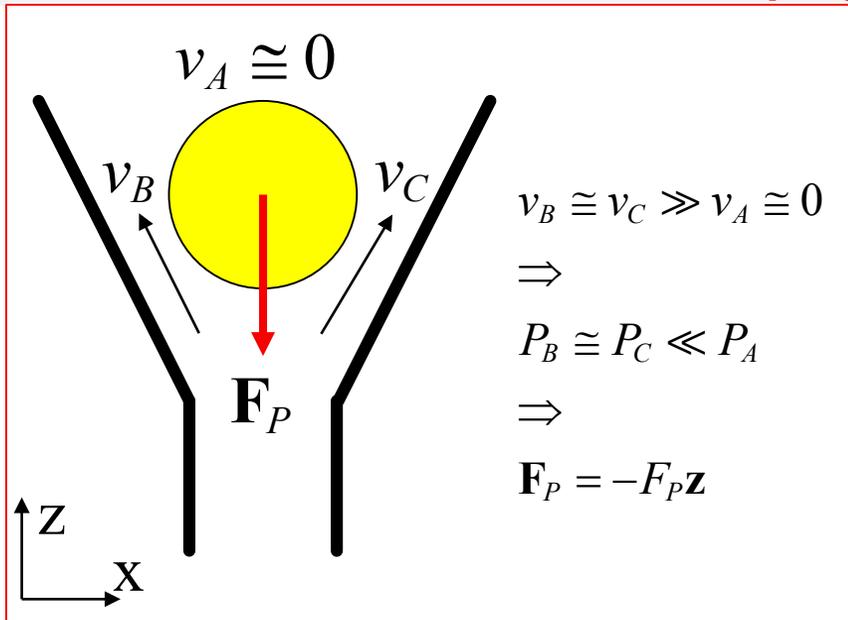
$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + P_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + P_2$

\Rightarrow

$P_2 < P_1$

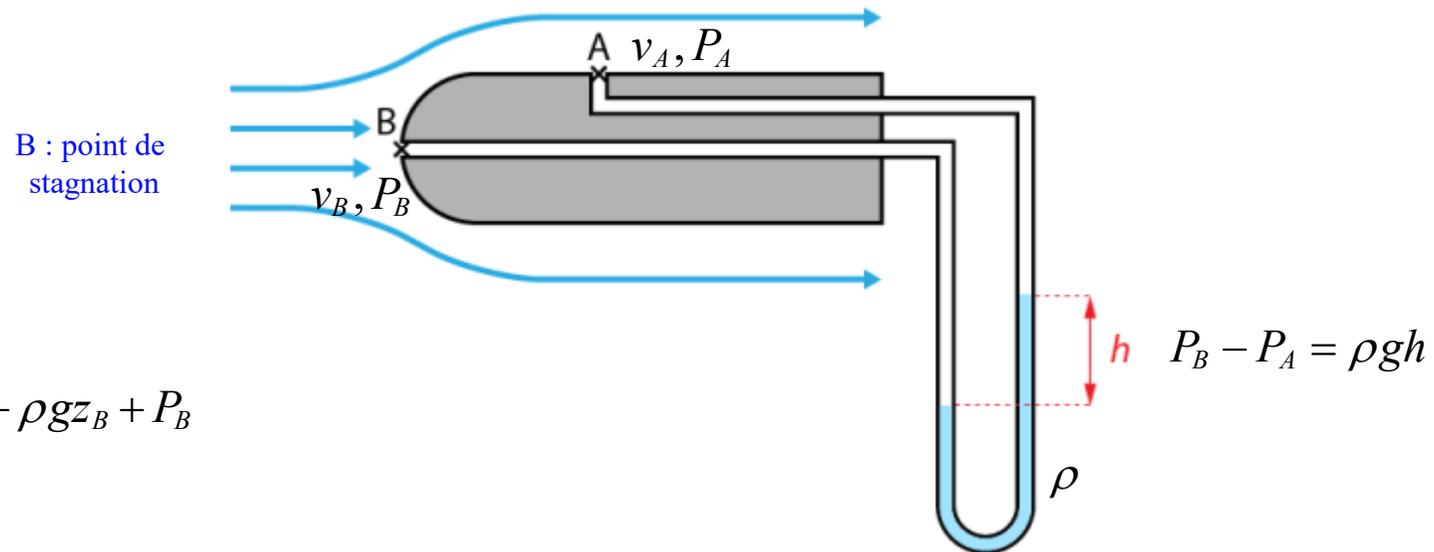
Exemples d'application de l'équation de Bernoulli:

La balle de ping-pong dans jet d'air



Exemples d'application de l'équation de Bernoulli:

Mesure de la vitesse d'un avion



$$\frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A + P_A = \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B + P_B$$

$$v_B \cong 0 \text{ et si } \rho g z_A \cong \rho g z_B \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \rho v_A^2 + P_A \cong P_B \Rightarrow$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2(P_B - P_A)}{\rho}}$$

La vitesse v_A est la vitesse de l'avion



Exemples d'application de l'équation de Bernoulli:

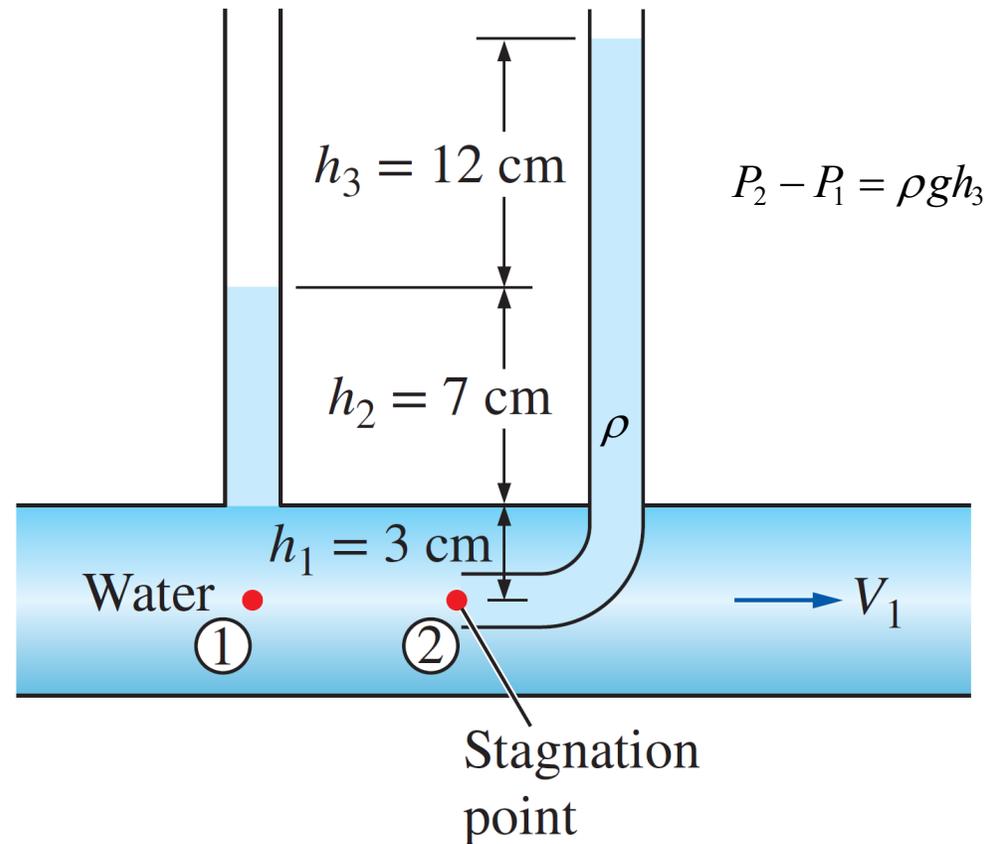
Mesure de la vitesse de l'eau dans un tuyau

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 + P_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 + P_2$$

$$v_2 \cong 0 \text{ et si } \rho g z_1 \cong \rho g z_2 \Rightarrow$$

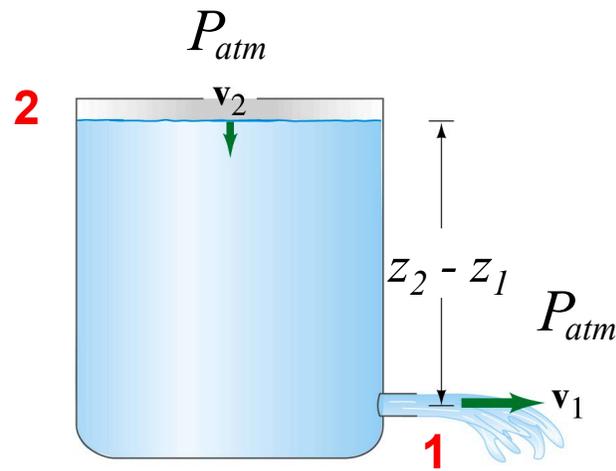
$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + P_1 \cong P_2 \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho}}$$



Exemples d'application de l'équation de Bernoulli:

Loi de Torricelli



$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 + P_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 + P_1$$

et

$v_2 \approx 0$ (tres large recipient avec petit trou)

$$P_2 = P_1 = P_{atm}$$

\Rightarrow

$$\rho g z_2 + P_{atm} = \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 + P_{atm}$$

\Rightarrow

$$v_1 = \sqrt{2 g (z_2 - z_1)}$$

Exemples d'application de l'équation de Bernoulli:

Le jet d'eau de Genève

v_2, P_2, z_2



v_1, P_1, z_1

Hauteur du jet (h):	140 m
Vitesse de sortie de l'eau:	200 km/h
Debit (dV / dt):	500 l/s
Puissance des pompes (P_p):	1 MW

$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 + P_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 + P_1$$

$$v_2 = 0 ; P_2 = P_1 = P_{atm}$$

\Rightarrow

$$\rho g z_2 + P_{atm} = \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 + P_{atm}$$

\Rightarrow

$$v_1 = \sqrt{2g(z_2 - z_1)}$$

$$\text{Pour } (z_2 - z_1) = h = 140 \text{ m} \Rightarrow v_1 = 52 \text{ m/s} = 188 \text{ km/h}$$

Dès la sortie de la buse, il règne dans le jet d'eau une pression égale à la pression atmosphérique P_{atm} . Pour s'en convaincre, si la pression dans l'eau était plus grande que P_{atm} , le liquide devrait s'étendre latéralement et le jet «exploser»!



1. Vitesse de sortie

v_1 (theorie Bernoulli, frottement négligé) = 188 km/h

v_1 (réelle) = 200 km/h

2. Puissance des pompes

$$\frac{dV}{dt} = 500 \text{ l/s} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} = 500 \text{ kg/s}$$

$$P_p \text{ (frottement négligé)} : (dm / dt)gh = 686 \text{ kW}$$

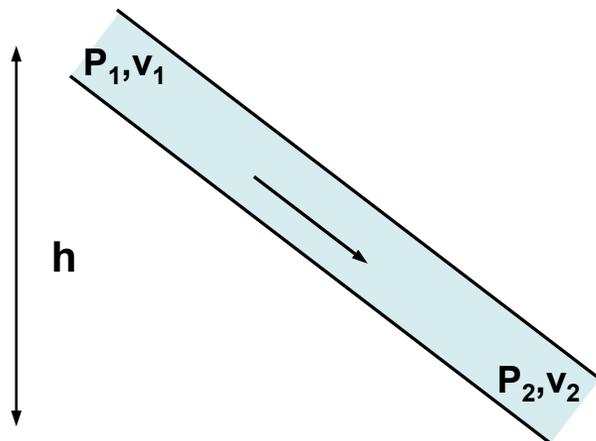
$$P_p \text{ (réelle)} : 1 \text{ MW}$$

3. La vitesse ($v_1 = \sqrt{2gh}$) est indépendant de ρ

La puissance des pompes est dependent de ρ .

Exemples d'application de l'équation de Bernoulli:

Conduite forcée ayant une section transversale constante



$$\text{Bernoulli: } \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + P = \text{const}$$

$$\text{Continuité pour fluide incompressible: } v_1 S_1 = v_2 S_2$$

$$\text{Geometrie: } S_1 = S_2$$

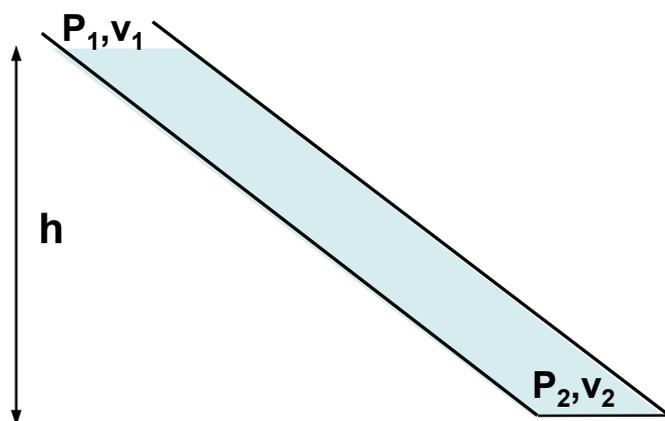
$$\Rightarrow v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \rho v_1^2 + P_1 + \rho g h = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + P_2$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2$$

$$P_2 = P_1 + \rho g h$$

Note 1: La pression augmente mais la vitesse n'augmente pas (si la conduite est entièrement remplie d'eau).

Note 2: La pression suit la même loi du cas **statique**.



Si le fond du tube est fermé (cas statique)

$$\Rightarrow v_1 = v_2 = 0$$

$$\Rightarrow P_1 + \rho g h = P_2$$

$$\Rightarrow P_2 = P_1 + \rho g h$$

Exemples d'application de l'équation de Bernoulli:

Ecoulement autour d'un cylindre infini

Bernoulli: considérons la ligne de flux ABCD

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + P_0 = P(a, \theta) + \frac{1}{2} \rho (v_\theta(a, \theta))^2$$

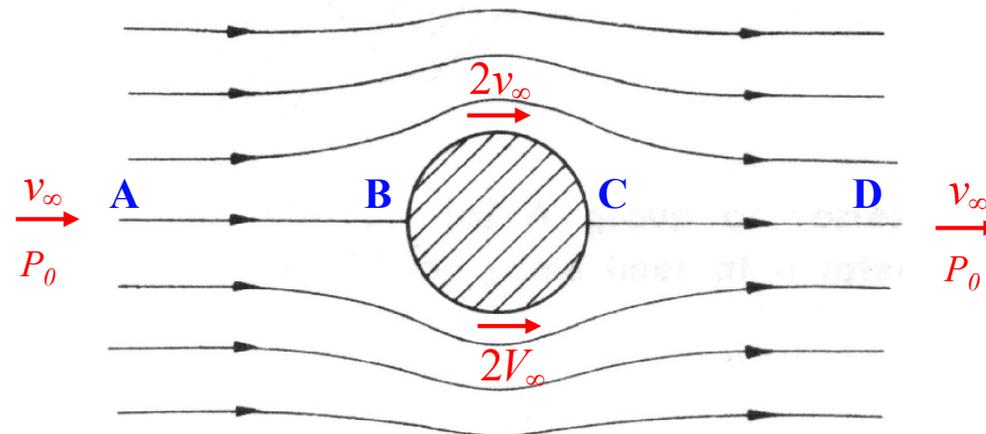
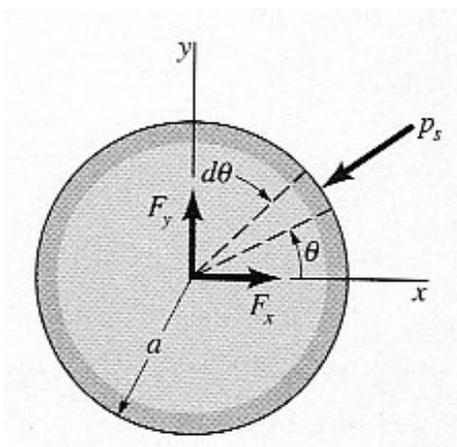
⇒

$$P(a, \theta) = P_0 + \frac{1}{2} \rho (v_\infty^2 - (v_\theta(a, \theta))^2)$$

mais $v_\theta(a, \theta) = -2v_\infty \sin \theta$ (voir 2.27)

⇒

$$P(a, \theta) = P_0 + \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 (1 - 4 \sin^2 \theta)$$



Force de trainée (Drag):

$$F_t = F_x = - \int_0^{2\pi} P(a, \theta) \cos \theta a d\theta = 0$$

Force de portance (Lift) :

$$F_p = F_y = - \int_0^{2\pi} P(a, \theta) \sin \theta a d\theta = 0$$

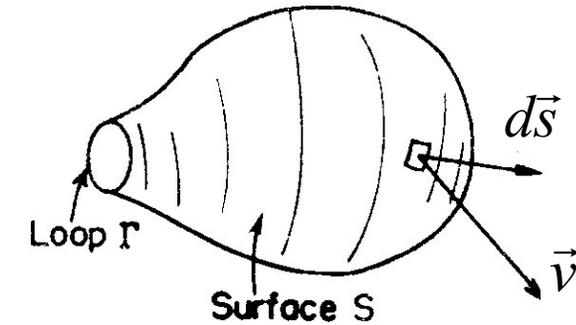
....donc si Bernoulli est vraiment applicable à ce problème,
pas de force sur le cylindre ! (????...voir plus tard dans le cours)

Le rotationnel du champ de vitesse:

Le vecteur tourbillon

Le vecteur tourbillon peut être interprétée comme «rotation de la particule fluide» (mais de quelle rotation s'agit-il ? Voir les diapositives suivantes)

Vecteur tourbillon: $\vec{T} \triangleq \nabla \times \vec{v}$



$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}$
Théorème de Stokes

$$\oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{T} \cdot d\vec{s} \quad \Rightarrow \quad \oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l} \neq 0 \Rightarrow \int_S \vec{T} \cdot d\vec{s} \neq 0$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \int_S \vec{T} \cdot d\vec{s} = 0$$

Écoulement rotationnel et irrotationnel (dans une région):

Irrotationnel: $\vec{T} = 0$

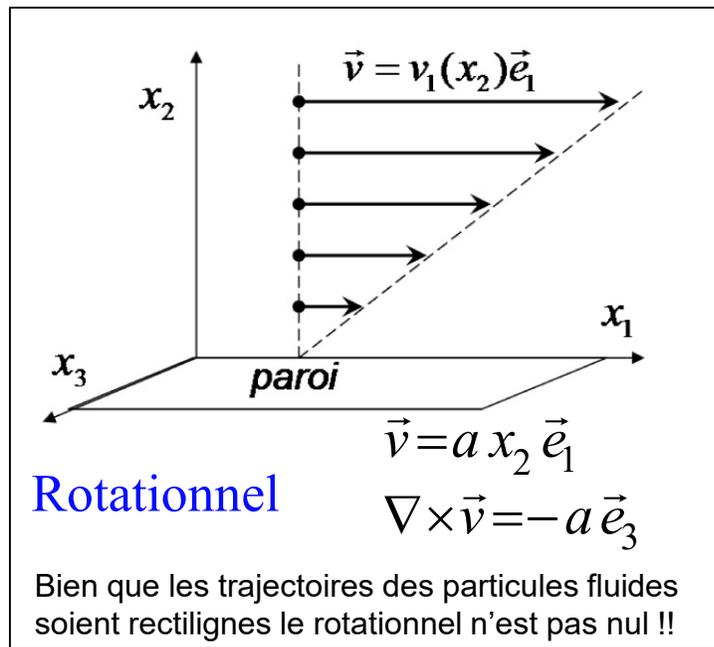
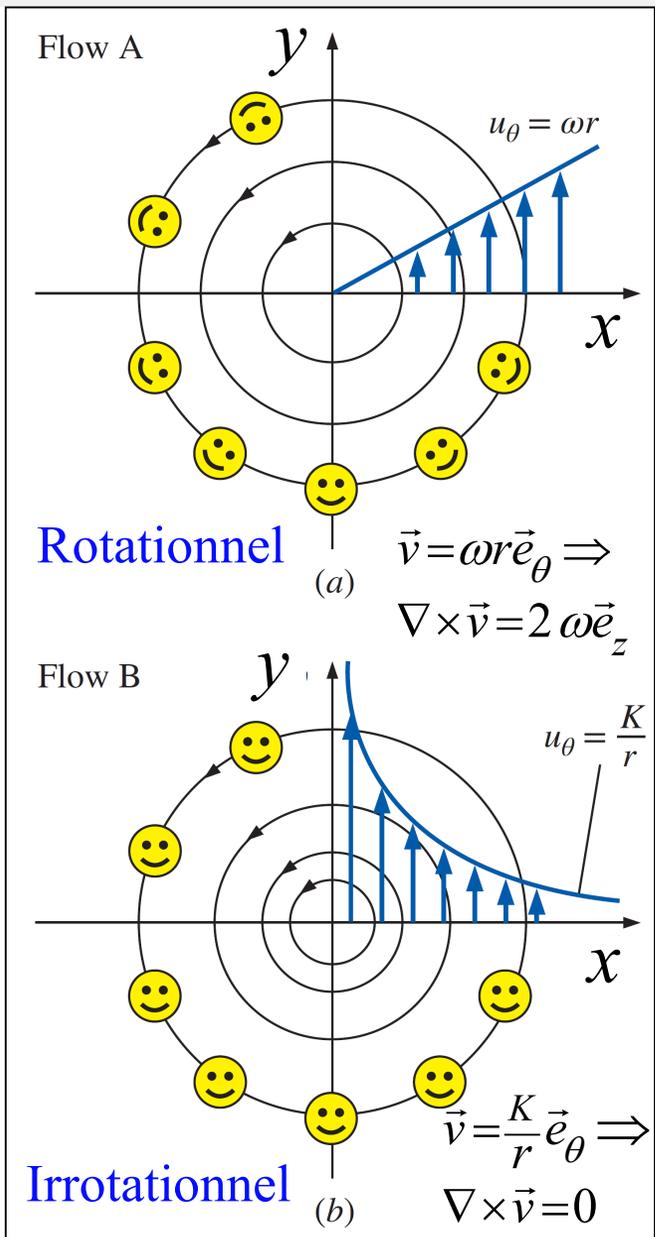
Rotationnel: $\vec{T} \neq 0$

Notes:

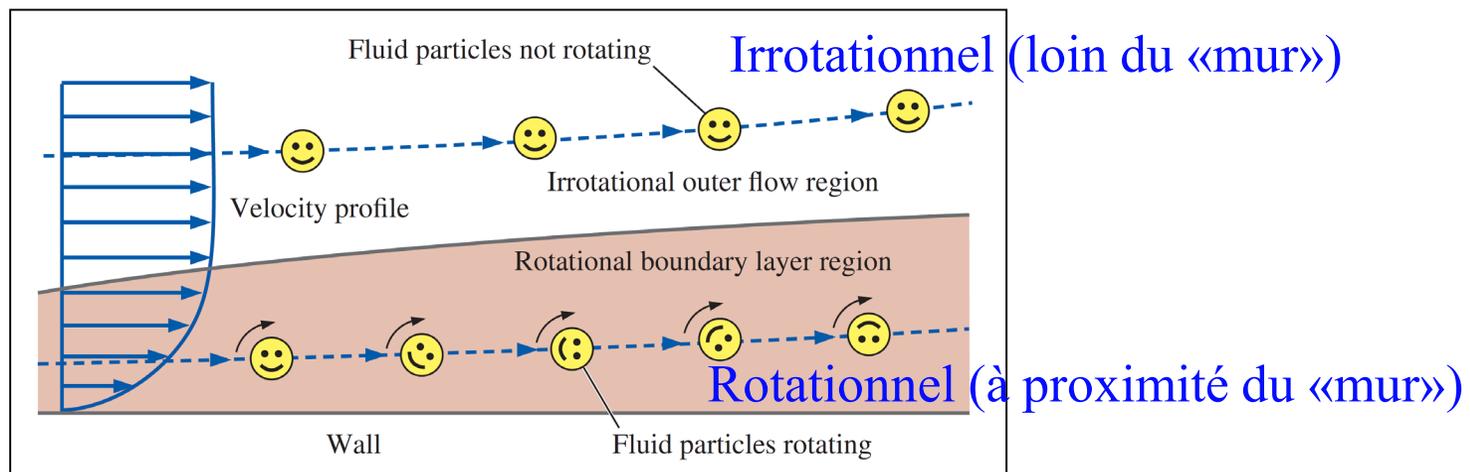
1. L'écoulement **irrotationnel** est un écoulement dans lequel toutes les particules fluides se déplacent, et se déplacent autour des obstacles, **sans rotation** autour de leurs centres de gravité infinitésimaux.
2. Aucun écoulement réel n'est irrotationnel. L'écoulement irrotationnel ne peut exister que s'il n'y a pas de viscosité et tous les fluides réels ont une viscosité.
3. L'hypothèse d'un écoulement irrotationnel est l'une des conditions simplificatrices que nous imposons (s'il s'agit d'une approximation pas trop fautive) aux champs de vitesse afin que nous puissions les résoudre plus aisément. La dynamique des fluides est très compliquée et nous devons introduire des simplifications pour progresser dans la résolution des écoulements.

Rotationnel ou irrotationnel?

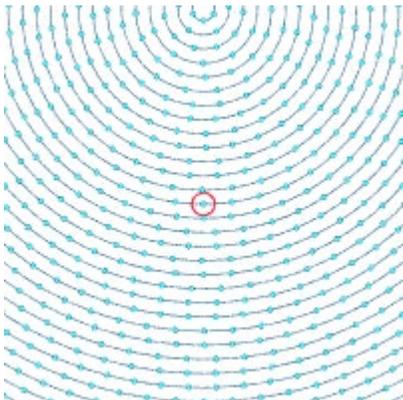
Champ tournant



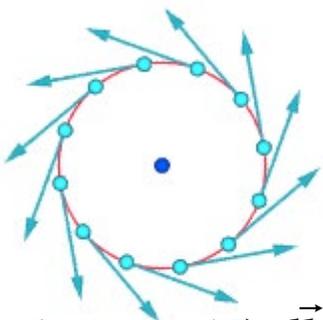
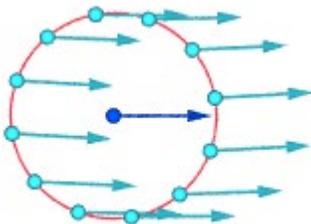
On peut visualiser le rotationnel en imaginant un grain de riz ou une roue à aubes qui serait entraîné (ou pas) en rotation par le mouvement du fluide.



Tourbillon à «corps rigide»



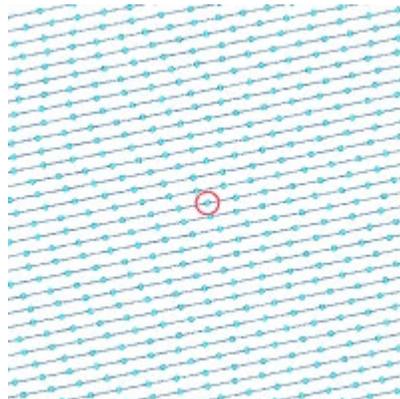
$$v \propto r$$



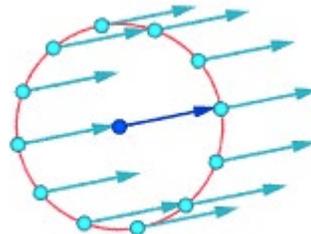
$$\vec{T} \neq 0 \quad \oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l} \neq 0$$

Γ Rotationnel

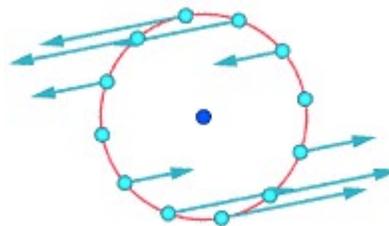
Flux parallèle avec cisaillement



Vitesses absolues autour du point bleu:



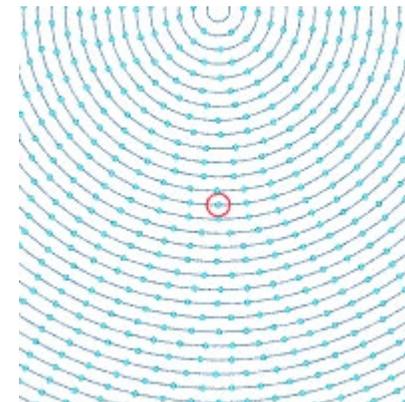
Vitesses relatives autour du point bleu:



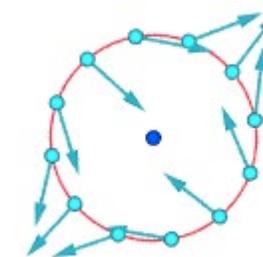
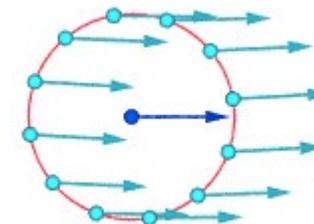
$$\vec{T} \neq 0 \quad \oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l} \neq 0$$

Γ Rotationnel

Tourbillon «en 1/r»



$$v \propto (1/r)$$



$$\vec{T} = 0 \quad \oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0$$

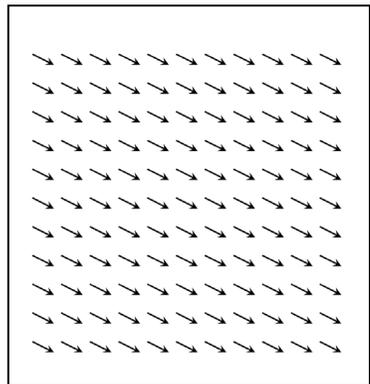
Γ Irrotationnel

Champ homogène:

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \Rightarrow$$

$$\nabla \times \vec{v} = 0$$

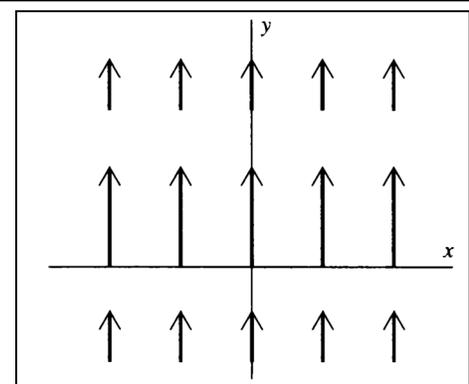
Irrotationnel



$$\vec{v} = v_0 e^{-y^2} \vec{e}_y \Rightarrow$$

$$\nabla \times \vec{v} = 0$$

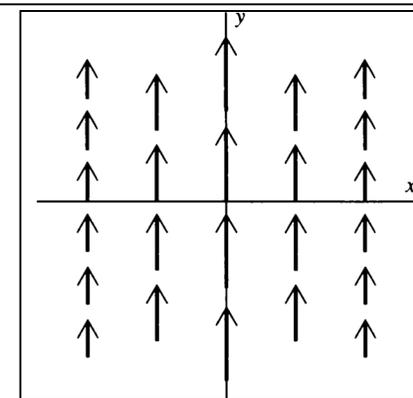
Irrotationnel



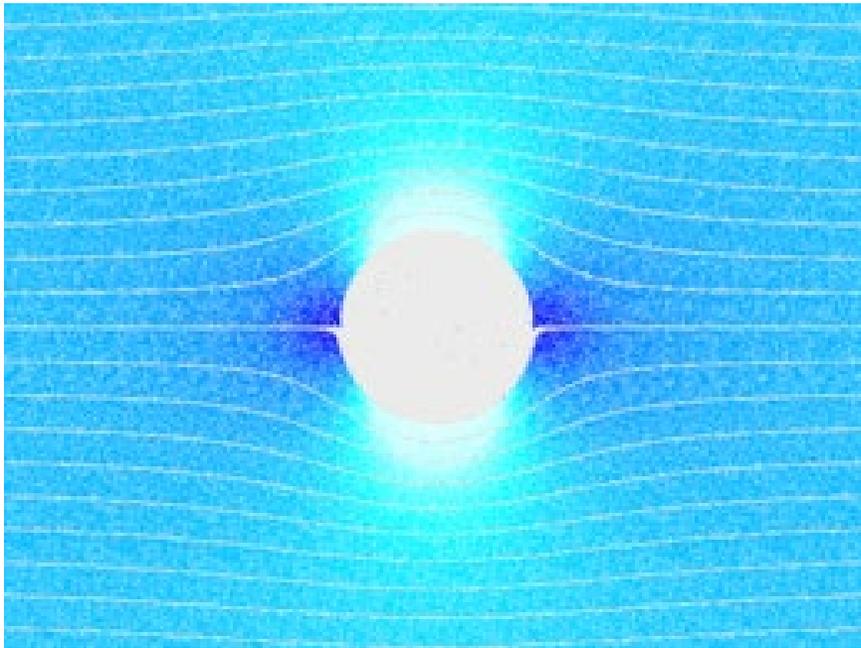
$$\vec{v} = v_0 e^{-x^2} \vec{e}_y \Rightarrow$$

$$\nabla \times \vec{v} = -v_0 2x e^{-x^2} \vec{e}_z$$

Rotationnel



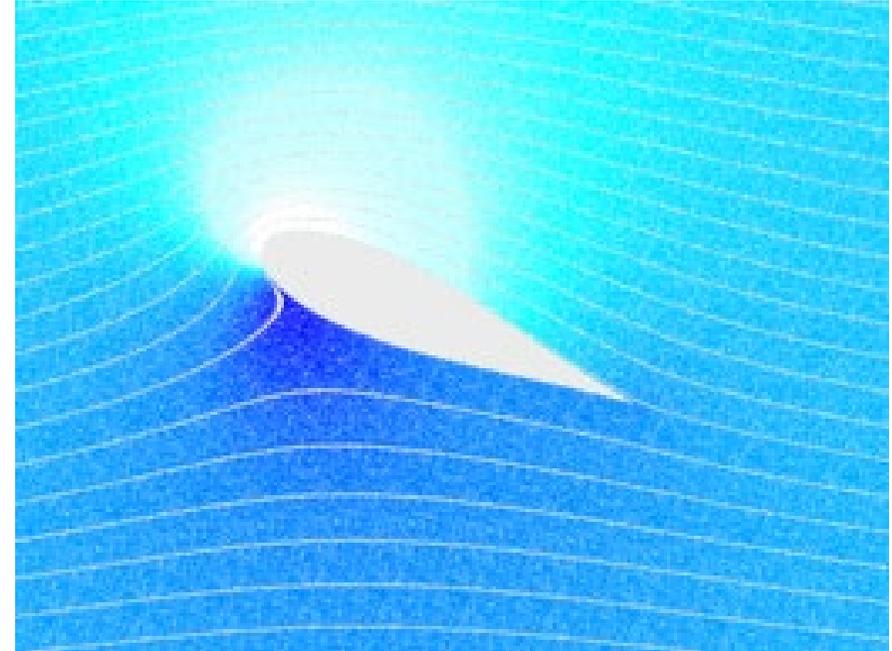
Écoulement autour d'une cylindre
(à faible vitesse)



Irrotationnel

$$\vec{T} = 0$$

Écoulement autour d'une aile
(à faible vitesse)



Irrotationnel

$$\vec{T} = 0$$